

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

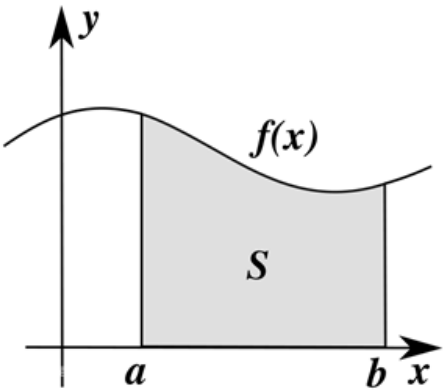
积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记13——定积分

定积分是积分的一种，是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和的极限。这里应注意定积分与不定积分之间的关系：若定积分存在，则它是一个具体的数值（曲边梯形的面积），而不定积分是一个函数表达式，它们仅仅在数学上有一个计算关系（牛顿-莱布尼茨公式），其它一点关系都没有！一个函数，可以存在不定积分，而不存在定积分，也可以存在定积分，而不存在不定积分。一个连续函数，一定存在定积分和不定积分；若只有有限个间断点，则定积分存在；若有跳跃间断点，则原函数一定不存在，即不定积分一定不存在。

什么是定积分

有一块形状不规则的土地，要测量它的面积，怎么办呢？



这意味着我们要求解曲线下的面积，该面积从 a 开始，到 b 结束，用 $\int_a^b f(x) dx$ 表示，这就是定积分。对比不定积分，发现定积分有起点和终点。不定积分是已知导数求原函数，定积分就是求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中的图像包围的面积。即由 $y=0, x=a, x=b, y=f(x)$ 所围成图形的面积。

黎曼和

如何求解曲线下的面积呢？为了简化问题，我们假设 $f(x) = x^2$ ，这是一个较为简单的曲线，同时设 $a = 0, b = 1$ ：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

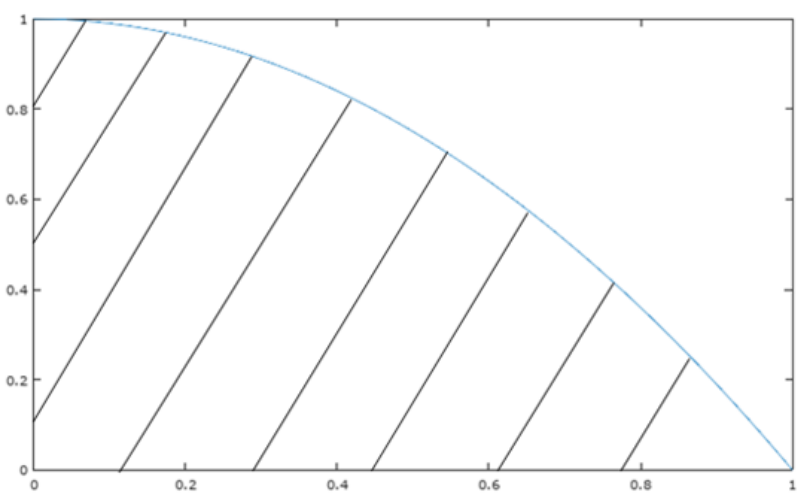
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

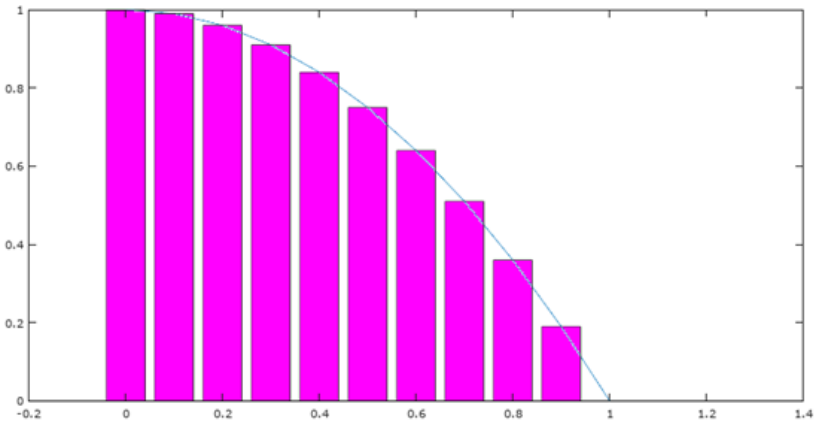
- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



分为三步计算面积：

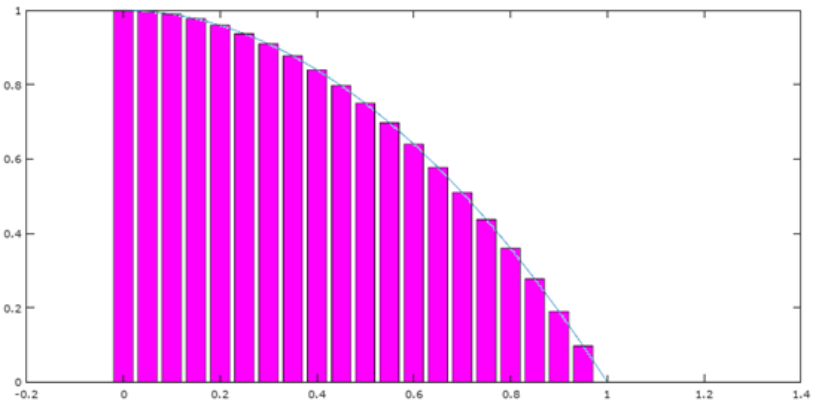
- 1. 首先把阴影部分却成一系列等宽的矩形；
- 2. 把这些矩形的面积加起来；
- 3. 修正之前的算法。

如下图所示：



将面积分为成一系列矩形

我们看到，每个矩形都可能超出或小于实际面积，所谓“修正之前的算法”，是修正矩形增加或减少的面积，具体做法是通过让矩形变窄来取得极限值，如下图所示：



矩形变窄

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

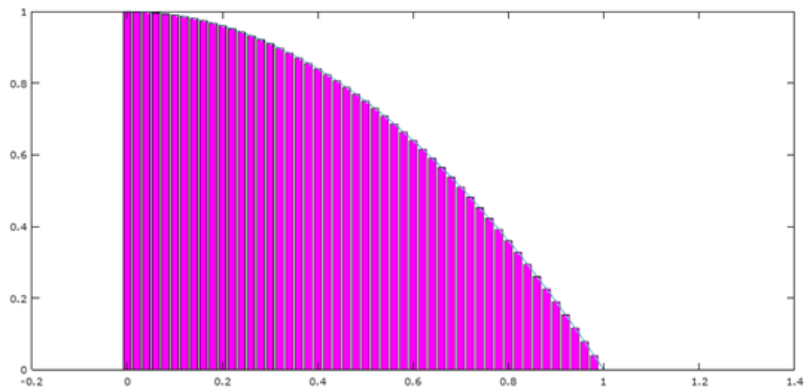
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



变得更窄的矩形

矩形越窄，就越接近实际面积。

当矩形宽度很小时，把所有矩形面积加起来就是这块不规则图形的面积，这就是著名的“黎曼和”。矩形宽度趋于0时，即为面积微分；各个面积求和取极限即为定积分。虽然牛顿时代就给出了定积分的定义，但是定积分的现代数学定义却是用黎曼和的极限给出。

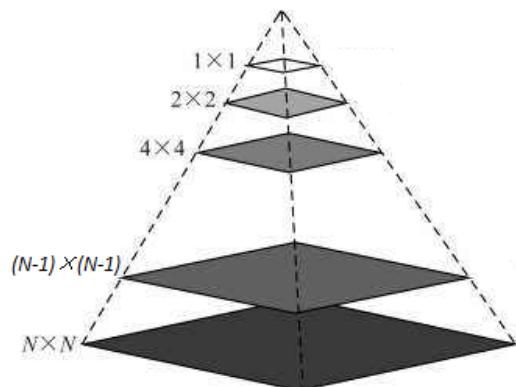
就上图而言， $f(x) = x^2$ ， $a = 0$ ，把ab分为n份：

$$\begin{aligned} \text{Sum}(S_{\text{矩形}}) &= \sum_{i=1}^n S_{\text{矩形}i} \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)f\left(\frac{b}{n}\right) + \left(\frac{b}{n}\right)f\left(\frac{2b}{n}\right) + \left(\frac{b}{n}\right)f\left(\frac{3b}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right)f\left(\frac{nb}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= b^3 \times \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{n^3} \\ &= b^3 \times \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \end{aligned}$$

曲线下的面积之和就是当 $n \rightarrow \infty$ 时的矩形面积之和。现在的问题是如何求得 $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)/n^3$ 。

这需要一点技巧，用作图法求解。

想象一下金字塔，每一层都是有若干块砖头堆砌而成，其模型如下：



垂直切割面如下面两图所示：

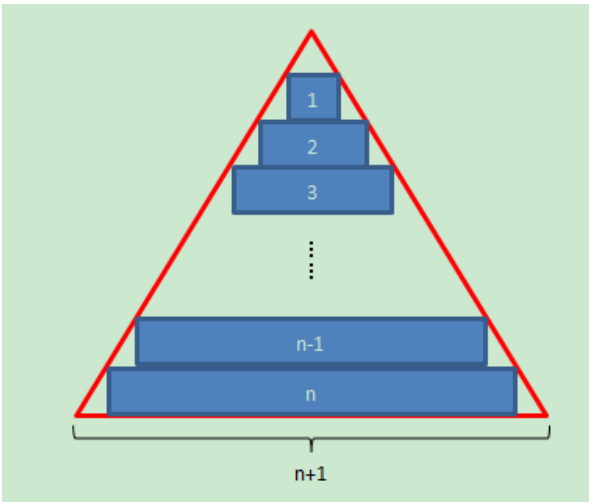


图1 三角形面积大于金字塔面积

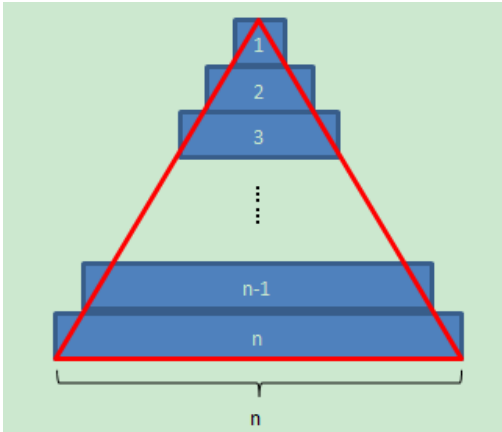


图2 三角形面积小于金字塔面积

由此可以将问题转换为求金字塔的体积。

$$\begin{aligned} V_{\text{图2}} &\leq \sum_{i=1}^n i^2 \leq V_{\text{图1}} \\ \frac{1}{3}(n)(n)^2 &\leq \sum_{i=1}^n i^2 \leq \frac{1}{3}(n+1)(n+1)^2 \\ \frac{1}{3}n^3 &\leq \sum_{i=1}^n i^2 \leq \frac{1}{3}(n+1)^3 \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3n^3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3n^3} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

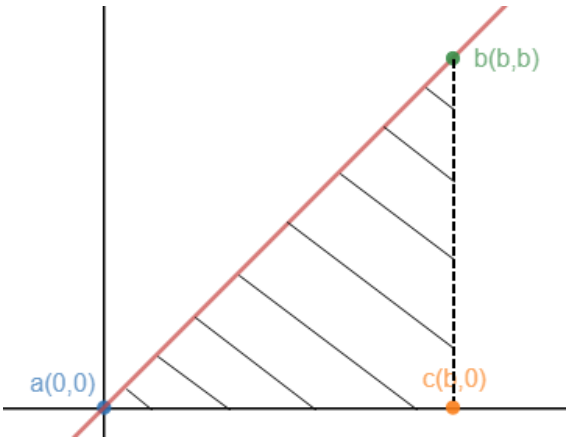
所以，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\begin{aligned} S_{\text{曲线}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_{\text{矩形}i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b^3 \times \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{b^3}{3} \\ \int_a^b x^2 dx &= \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

面积的示例

三角形的面积

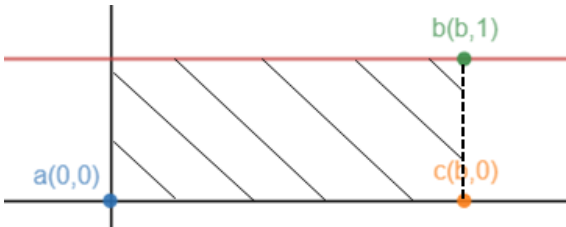
$f(x) = x$ ，求阴影部分三角形面积。



$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i \times b}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n i^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{n^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

长方形的面积

$f(x) = 1$ ，求阴影部分长方形的面积。



$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n} \times 1\right) = b$$

定积分的公式

结合上面的例子，设 $\Delta x = (b - a)/n$ ，给出定积分公式：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \Delta x$$

可以得到下面的表格：

$f(x)$	$\int_a^b f(x) dx$
x^2	$b^3/3$
x^1	$b^2/2$
x^0	b

可以大胆地猜测， $\int_a^b x^3 dx = b^4/4$

示例

估算 $f(x) = x^3$ 在 $[-1, 3]$ 上的定积分。

设 $\Delta x = 1$,

$$\int_{-1}^3 x^3 dx \approx ((-1)^3 + (0)^3 + (1)^3 + (2)^3) \Delta x = 8$$

总结

1. 定积分就是求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中的图像包围的面积。
2. 当矩形面积很小时, 把所有矩形面积加起来就是这块不规则图形的面积, 这就是著名的“黎曼和”。
3. 定积分公式:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i(b-a)}{n}) \Delta x$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [定积分](#), [黎曼和](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [线性代数笔记1——矩阵的基本运算](#)

» 下一篇: [线性代数笔记2——向量 \(向量简介\)](#)

posted on 2017-10-17 22:48 [我是8位的](#) 阅读(3091) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes